



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PAULO ESTÉFANO ARAÚJO DA SILVA

**A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O ENSINO MÉDIO**

MOSSORÓ/RN  
2017

PAULO ESTÉFANO ARAÚJO DA SILVA

**A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido, campus Mossoró/RN para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Dr. Odacir Almeida Neves

PAULO ESTÉFANO ARAÚJO DA SILVA

**A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido, campus Mossoró/RN para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Dr. Odacir Almeida Neves - UFERSA  
Presidente

---

Membro interno

---

Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2017.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico aos meus ex-professores do colegial: Alisson, Bergson, Railson, Rodrigo, Elieser, e aos demais que me falham na memória. Em geral a todos que puderam me ensinar do fundamental ao médio.

Dedico aos meus professores de licenciatura, principalmente: Francisco Derilson (pelo incentivo e confiança em me candidatar ao mestrado PROFMAT), Enio Virgílio, Ana Shirley, Josildo Barbosa, Geovanizélio, Assis, Francisca Valéria, Rafael, Socorro Aragão e Elias Das Neves; mas também aos demais professores do departamento: Hélio, Graciana, Kleber Soares, Ronaldo Garcia, Braz, Odaívo, Carlão, Fátima, Rivaldo e Laudelino; dentre outros que também contribuíram para meu aprendizado a nível superior.

Dedico a Deus, pois faço tudo pensando nele e com a ajuda do divino Espírito Santo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa, Anelândia Maria Da Conceição Silva, por estar sempre me incentivando a fazer esta dissertação. Diante da necessidade financeira e pelo gosto da profissão tive que assumir dois empregos de docência justos no momento de escrita do trabalho de conclusão do curso (TCC), onde ela ficava sempre no meu pé, seja mandando ou me lembrando deste compromisso.

Agradeço ao meu orientador, Odacir Almeida Neves, por me aceitar como orientando. Diante da pouca disponibilidade de tempo, agradeço a ele pela paciência comigo. Pela contribuição como orientador na dissertação e como professor da disciplina de recursos computacionais no ensino de matemática. E também, devido trabalhar como docente do centro de ciências exatas e naturais (DCEN) da UFERSA agradeço pela ajuda e companheirismo profissional.

Agradeço a minha mãe, Maria De Fátima Araújo Da Silva, e minhas tias, Lucinês e Aparecida, por, dentre os familiares, serem as que mais me apoiam profissionalmente, seja perguntando como está o andamento, ou incentivando de que este é realmente o caminho certo, devido eu estar buscando o trabalho em que realmente gosto.

Agradeço a Antonio Ronaldo Gomes Garcia, pela ajuda no meu crescimento profissional, seja no incentivo de estudos enquanto mestrando ou em me fazer enxergar a minha própria capacidade de conhecimento.

E também a todos os outros professores de mestrado, Walter Martins Rodrigues, Kleber Soares Camara, Valdenize Lopes Do Nascimento, Mauricio Zuluaga Martinez e Elmer Rolando Llanos Villarreal.

A professora Andrea Maria Ferreira Moura. Ela na função de vice-chefe do DCEN, me acolheu, como professor da UFERSA, maravilhosamente, dando conselhos de como atuar profissionalmente. E também, pela paciência devida eu ter passado por problemas de saúde.

Por fim, e em primeiro lugar, agradeço a DEUS por tudo. Por me dar de tudo o que preciso para viver bem, mesmo que eu não mereça. Por me ajudar em diversos problemas de saúde em que venho passando. Por me ajudar nas diversas aprovações em que tive profissionalmente: seleções para licenciatura e para mestrado, vários concursos para professores, qualificação do mestrado, etc. Por o senhor estar comigo seja onde eu for. Portanto, por me amar.

“Todas as verdades são fáceis de perceber depois de terem sido descobertas, o problema é descobri-las.”

(Galileu Galilei)

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 01:</b> Leonardo Fibonacci .....	15
<b>Figura 02:</b> Diagrama do problema da reprodução dos coelhos.....	18
<b>Figura 03:</b> Medição dos ossos do dedo médio de uma pessoa .....	22
<b>Figura 04:</b> Árvore genealógica de um zangão .....	23
<b>Figura 05:</b> Possibilidades de refração do raio de luz por duas placas de vidro.....	24
<b>Figura 06:</b> Somas dos elementos da diagonal inversa do triângulo de Pascal .....	25
<b>Figura 07:</b> Tonalidades do dó maior .....	26
<b>Figura 08:</b> Erva da fortuna roxa .....	26
<b>Figura 09:</b> Trevos normais .....	27
<b>Figura 10:</b> Ameixoeira dos jardins .....	27
<b>Figura 11:</b> Flor coreópsis .....	28
<b>Figura 12:</b> Margarida de 8 pétalas .....	28
<b>Figura 13:</b> Margaridas de 13 pétalas .....	29
<b>Figura 14:</b> Margaridas com 21 pétalas .....	29
<b>Figura 15:</b> Achillea ptarmica .....	30
<b>Figura 16:</b> A sequência de Fibonacci no livro Matemática Paiva .....	31
<b>Figura 17:</b> A árvore de Emília .....	46

## LISTA DE TABELAS

<b>TABELA 01:</b> Resolução do problema de reprodução dos coelhos .....	20
<b>TABELA 02:</b> Triângulo de Pascal na forma binária .....	40

## **SÍGLAS**

ESAF – Escola de Administração Fazendária

FDC – Fundação Dom Cintra

IME – Instituto Militar de Engenharia

ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

## RESUMO

A presente pesquisa tem como objeto de estudo a Sequência de Fibonacci, entretanto orientando nosso olhar a sua ligação com conteúdos matemáticos referentes ao ensino médio, haja vista a pouca abordagem desse tema em livros didáticos. Para esta investigação foi traçado como objetivo geral, estimular ainda mais o estudo da sequência de Fibonacci, principalmente, quanto ao seu envolvimento ao conteúdo de sequências visto no 1º ano do ensino médio, ligeiramente perseguido dos seguintes objetivos específicos: apresentar a sequência de Fibonacci juntamente com a biografia do seu criador; identificar as relações da sequência de Fibonacci com os fenômenos da natureza; identificar e demonstrar algumas propriedades matemática envolvidas na sequência de Fibonacci; e identificar os conteúdos de matemática do ensino médio em que o estudo da sequência de Fibonacci pode ser utilizado. Nossa inquirição é de caráter exclusivamente bibliográfico, onde para sua realização, destacamos a busca de auxílio em leituras de autores como ÁVILA (1985) e CARVALHO (1990). As leituras nos conduziram há ressaltar um pouco sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci, o qual, por meio de um problema deixado em um de seus livros, foi quem deu início a descoberta da sequência de Fibonacci. Em seguida, é apresentado o envolvimento da sequência de Fibonacci com o cotidiano dos alunos, principalmente, quanto à ligação com a natureza. Também é apresentado algumas propriedades inerentes a sequência, verificando quais conteúdos matemáticos estão envolvidos no seu estudo. Por fim, em tentativa de comprovar a relevância de repassar o conteúdo sobre a sequência de Fibonacci, são expostas algumas questões de provas anteriores referentes à OBM, OBMEP, concursos e seleções de vestibulares.

**Palavras-chave:** Sequência de Fibonacci; Ensino Médio; Leonardo Fibonacci; Cotidiano; Propriedades; Questões de provas anteriores.

## ABSTRACT

The present search has as object of study the Fibonacci Sequence, however orienting our look at its connection with mathematical contents referring to the high school, due to the little approach of this theme in textbooks. For this research it was settled as a general objective to further stimulate the study of the Fibonacci sequence, mainly regarding its involvement with the sequence content studied in the first year of high school, followed by these specific objectives: to present the Fibonacci sequence beside the biography of its creator; to identify the relations of the Fibonacci sequence with the phenomena of nature; identify and demonstrate some mathematical properties involved in the Fibonacci sequence; and identify the high school mathematic contents in which the study of the Fibonacci sequence can be used. Our inquiry is exclusively bibliographical and, for its accomplishment, we seek help mainly in readings by authors like Ávila (1985) and CARVALHO (1990). The readings led us to emphasize a little about the history of the mathematician Leonardo Fibonacci, who, through a problem left in one of his books, began the discovery of the Fibonacci sequence. Then, the involvement of the Fibonacci sequence with the daily life of the students is presented, especially regarding the connection with nature. Some properties inherent to the sequence are also presented, verifying which mathematical contents are involved in their study. Finally, in an attempt to prove the importance of passing the content on the Fibonacci sequence, some questions of previous tests regarding to OBM, OBMEP, competitions and vestibular selections are exposed.

**Keywords:** Fibonacci sequence; High school; Leonardo Fibonacci; Daily life; Properties; Questions of previous tests.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
2 BIOGRAFIA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	15
2.1 BIOGRAFIA DE FIBONACCI.....	15
2.2 PRIMEIROS INDÍCIOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	17
3 DIVERSIDADE DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	22
3.1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO CORPO HUMANO.....	22
3.2 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E AS ABELHAS.....	23
3.3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA FÍSICA.....	24
3.4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO TRIÂNGULO DE PASCAL.....	24
3.5 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA MÚSICA.....	25
3.6 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A NATUREZA.....	26
4 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO MÉDIO.....	31
4.1 ALGUMAS PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	32
4.2 QUESTÕES REFERENTES À SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	43
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	47
REFERÊNCIAS.....	48
APÊNDICE A - Possíveis soluções das questões 1 á 6.....	50
APÊNDICE B - Plano de aula referente à sequência de Fibonacci.....	54

## 1 INTRODUÇÃO

Ao retratarmos sobre sequências, nos deparamos com um dos conteúdos matemáticos mais amplos de conhecimento, pois contém vários casos a serem analisados, devido aos diversos tipos de sequências que podem existir.

De acordo com o Dicionário de português on-line *Michaelis* (2009), define-se sequência como um “Número de coisas ou eventos que se seguem um após outro; série, sucessão, ordem”. Assim, podem-se haver vários tipos de sequência, como: sequência alfabética de uma lista de autores, sequência musical, etc.

No estudo da Matemática temos uma parte que fala de sequências, as sequências numéricas, onde, recai nos livros do 1º ano do Ensino Médio. A sequência numérica é uma parte da matemática que dispõe os números numa determinada ordem preestabelecida.

Alguns exemplos de sequências são: sequência dos cinco primeiros números naturais (1, 2, 3, 4, 5); sequência dos números ímpares (... , -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...); ou, até mesmo, uma sequência aleatória (2, 3, 5, 8, 13, 21).

Quando nos retratamos de sequência, logo nos vem à mente uma progressão, aritmética (P.A.) ou geométrica (P.G.). Isto pode se dar ao fato que a maioria dos livros de matemática do ensino médio ao apresentar o conteúdo de sequências, primeiramente apresenta as sequências numéricas de um modo geral, logo em seguida específica, de forma detalhada, as progressões aritméticas e geométricas.

Segundo Paiva (2013), progressão aritmética “é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante  $r$ . O número  $r$  é chamado a razão da progressão aritmética”, e progressão geométrica (2013) “é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante  $q$ . O número  $q$  é chamado de razão da progressão geométrica”. Assim, (1, 3, 5, 7, 9, ...) e (1, 2, 4, 8, 16, ...), são exemplos de P.A. e P.G., respectivamente, ambas de razão  $r = 2 = q$ .

Uma sequência importante e que não é apresentada de maneira adequada no ensino médio é a de Fibonacci, daí, fica instigante o questionamento “por que não, apresentar a sequência de Fibonacci no conteúdo de sequências do ensino médio?”, ou ainda, devido às propriedades matemáticas inerentes a esta sequência, “que conteúdos

matemáticos do Ensino Médio podem ser introduzidos o estudo da sequência de Fibonacci?”.

Alguns estudos indicam que a sequência de Fibonacci vem sendo estudada desde o século XIX, tanto quanto às propriedades matemáticas inerentes a ela, mas também sobre o seu envolvimento com a natureza. De acordo com essas propriedades, iremos verificar se a sequência de Fibonacci possui uma relação com demais conteúdos matemáticos, tais como: máximo divisor comum (MDC), divisibilidade, números primos, entre outros.

Pesquisas mostram que autores como ÁVILA<sup>1</sup> e CARVALHO<sup>2</sup>, surgiram como suporte para serem utilizados para justificar nossa opção.

Com este trabalho tem-se a pretensão de estimular ainda mais o conhecimento sobre a sequência de Fibonacci, principalmente, quanto ao seu envolvimento ao conteúdo de sequências, visto no 1º ano do ensino médio.

Assim, com base nas referências estudadas, esse trabalho foi desenvolvido com objetivos de apresentar a sequência de Fibonacci juntamente com a biografia do seu criador, identificar as relações da sequência de Fibonacci com os fenômenos da natureza, identificar e demonstrar algumas propriedades matemática envolvidas na sequência de Fibonacci, e ainda, de identificar os conteúdos de matemática do ensino médio que o estudo da sequência de Fibonacci pode ser utilizado.

A partir daí, esta pesquisa foi desenvolvida em 5 capítulos, sendo este o primeiro, que introduz o conteúdo de sequências dos livros do 1º ano do ensino médio.

No segundo capítulo, é feito um recorte histórico da biografia de Leonardo Fibonacci que foi quem deu origem a descoberta da sequência de Fibonacci, em seguida

---

<sup>1</sup> **Geraldo Ávila:** nasceu em 17 de abril de 1933 em Alfenas-MG e licenciou-se em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Em 1957 recebeu uma das primeiras bolsas do CNPq para doutoramento no exterior. Em 1961 recebeu o grau de PhD em Matemática. Realizou projetos de pesquisa na área de Sistemas Hiperbólicos Simétricos e Teoria de Espalhamento, gerando a publicação de vários artigos. Escreveu livros didáticos de nível universitário e artigos de divulgação, onde, um de seus livros, *Introdução à Análise Matemática*, ganhou o Prêmio Jabuti em 1994. Foi um dos assíduos colaboradores da *Revista do Professor de Matemática*, uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), onde publicou dezenas de artigos. Foi o fundador da *Matemática Universitária*, outra publicação da SBM.

<sup>2</sup> **João Carvalho:** Possui graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Ceará (1962), mestrado (1964) e doutorado (1967) em Matemática pela University of Chicago. Atualmente é professor visitante do Instituto de Matemática da UFRJ. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: história da matemática, ensino-aprendizagem de matemática, geometria dinâmica, história da educação matemática e ensino-aprendizagem de geometria, avaliação de livros didáticos de Matemática e história do livro didático de Matemática. Foi um dos assíduos colaboradores da *Revista do Professor de Matemática*, uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

é apresentada a sequência de Fibonacci por meio do “problema dos coelhos”, onde pode ser vista em um de seus principais livros o “Liber Abaci”.

Na terceira parte deste trabalho é apresentada uma diversidade de exemplos que podem gerar a sequência de Fibonacci, onde se pode ver que muitos deles são ligados a fenômenos da natureza.

No quarto capítulo são apresentadas algumas propriedades matemáticas referentes à sequência de Fibonacci, onde, diante destas propriedades é feita uma análise de quais conteúdos matemáticos pode ser inserida a sequência de Fibonacci. Ainda neste capítulo é feito um recorte de questões do ensino médio referentes à sequência de Fibonacci.

Na quinta e última seção são feitas considerações finais sobre o trabalho, a sua aplicabilidade e as expectativas com relação à contribuição que o trabalho pode trazer para ajudar os docentes no ensino da matemática.

## 2 BIOGRAFIA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Esta seção está dividida em duas partes. A primeira descreve a biografia de Fibonacci, enfocando sua contribuição com a matemática e ressaltando suas obras. A segunda, os primeiros indícios da Sequência de Fibonacci que se deu ao que hoje é chamado de “problema dos coelhos” tirado do livro de Leonardo Fibonacci.

### 2.1 BIOGRAFIA DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci, mais conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, devido ter nascido na cidade de Pisa na Toscana da Itália, foi um italiano que nasceu por volta de 1170 e morreu em 1250 com 80 anos.

**Figura 01:** Leonardo Fibonacci



**Fonte:** Disponível em: <<http://www.mathstimes.com/just-for-fun-in-fibonacci-sequence/leonardo-fibonacci-granger/>>.

Acesso em: 23/07/2017.

Hoje ele é considerado não apenas como um matemático, mas para alguns, como o maior matemático medieval, devidos aos seus estudos e contribuições com a matemática. Segundo Lívio (2006), “Leonardo Pisano (Leonardo de Pisa) foi um dos matemáticos mais importantes da idade média”.

Leonardo (que chamaremos apenas por Fibonacci) teve como pais Alessandra Bonnacci e Guiliermo Bonnacci.

Maurício Zahn (2011), ao se retratar do pai de Fibonacci fala o seguinte: “Seu pai, *Guiliermo Bonnacci*, que era ligado aos negócios mercantis, foi convidado a trabalhar em Benjaia, na África, numa função alfandegária. Isso fez com que Leonardo [...] se interessasse pela Aritmética”. Assim, foi ajudando no trabalho de seu pai que Fibonacci teve os primeiros contatos com a matemática tanto Hindu quanto Árabe.

Durante as relações comerciais do trabalho, Fibonacci percebia as dificuldades para registrar os estoques e preços com numerais Romanos. De acordo com Alexandre Souza (2013), Ele dizia que qualquer número poderia ser escrito com os nove algarismos (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2,1) mais o signo 0”.

Assim, ele participou da evolução da matemática na Europa resolvendo problemas matemáticos, onde mostrou a eficiência dos cálculos aritméticos usando os algarismos arábicos.

Sob a proteção do imperador Frederico II, e por ter resolvido problemas matemáticos da corte, Fibonacci aprofundou seus estudos sobre matemática, avaliando que os algarismos arábicos seriam mais eficientes que os números romanos para cálculos aritméticos.<sup>3</sup>

Ao longo da sua contribuição com a matemática, Fibonacci escreveu quatro livros, quais sejam: *Líber Abacci* (1202), *Practica Geometriae* (1220), *Liber Quadratorum* (1225) e *Flos* (1225).

Na obra **Practica Geometriae** que quer dizer geometria prática, Fibonacci fez estudos relacionando a geometria com a trigonometria. Valéria Luchetta (2003), ao se retratar sobre esta, fala que:

*Practica geometriae*, uma coleção de material sobre geometria e trigonometria, numa abordagem hábil feita com rigor euclidiano, contendo entre outras coisas, uma prova de que as medianas de um triângulo se dividem na razão de dois para um e um análogo tridimensional do Teorema de Pitágoras.<sup>4</sup>

Já na obra **Liber Quadratorum**, cujo significado é quadrados livres, é considerada por muitos o seu maior legado, onde há vários estudos, um deles, sobre problemas de aritmética, faz aproximações de raízes cúbicas.

<sup>3</sup> Disponível em: < [https://www.ebiografia.com/leonardo\\_fibonacci/](https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/) >. Acesso em: 23/08/2016.

<sup>4</sup> Disponível em: < <http://www.matematica.br/historia/fibonacci.html> >. Acesso em: 23/07/2017.

Segundo Rogério Ferreira (2007), “É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal”; já Carlos Fernandes fala que “considerada sua obra prima e consistindo de um brilhante estudo sobre análise indeterminada, uma série de teoremas e a resolução de problemas aritméticos de grande relevância para estudos matemáticos posteriores<sup>5</sup>”.

No livro **Flos** de significado flor, Rogério Ferreira (2007), cita “Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinha sido colocado por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II”.

Apesar do livro **Líber Abacci**, cujo significado é livro do ábaco, ter sido o primeiro a ser escrito por Fibonacci, é o mais conhecido até então, pois foi nele que se ressaltou pela primeira vez o problema dos coelhos.

## 2.2 PRIMEIROS INDÍCIOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

O livro Liber Abacci é baseado em estudos de aritmética onde nele é introduzido os números indo-arábicos. Ele é dividido em 15 capítulos, mas é no 12º capítulo que fez com que Fibonacci ficasse bastante conhecido, devido ter feito a resolução de um problema que hoje é chamado de problema da reprodução dos coelhos.

No entanto, Fibonacci ficou conhecido não exatamente pelos seus livros, mas pelo fato de Edouard Lucas, na sua Coleção *Récréations mathématiques*, ter dado o nome Fibonacci a uma sequência que aparece como solução de um problema do Liber Abacci. (RAMOS, 2013, p. 5)

Portanto, o problema em questão é considerado o mais famoso, entre todos os tratados por Fibonacci e foi retratado, em seu livro, da seguinte forma:

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?<sup>6</sup>

Considerando que um par de coelhos fértil dá a luz a um novo par de coelhos após o segundo mês de vida, que todos os coelhos estejam vivos ao final dos doze

---

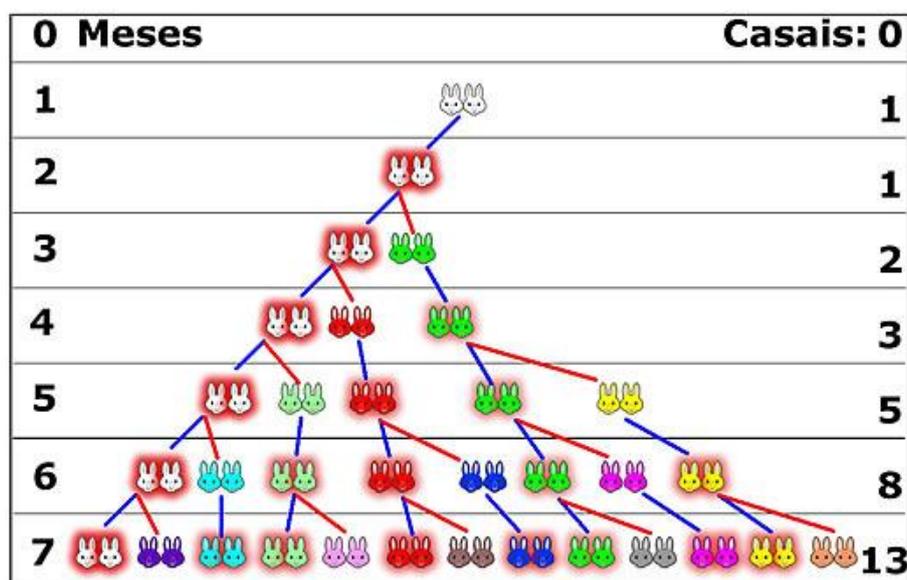
<sup>5</sup> Disponível em: <<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/LnardPis.html>>. Acesso em: 23/07/2017.

<sup>6</sup> Disponível em: <<https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos>>. Acesso em: 30/10/2015.

meses, e ainda, que não haja problemas genéticos ou impossibilidades de fertilização de cada casal tem-se o seguinte.

A resolução desse problema é de fácil esquematização para os primeiros meses como é exposto na **FIGURA 02**.

**Figura 02:** Diagrama do problema da reprodução dos coelhos



**Fonte:** Disponível em: < <http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/>>.

Acesso em: 03/07/2017.

Ao final do primeiro e segundo mês haverá apenas o casal de coelhos inicial. Já, como após o segundo mês ele geraria outro par de coelhos, no final do terceiro mês teremos 2 pares de coelhos, sendo o par inicial e o outro já com um mês de vida.

Devido o par de coelhos inicial já ter mais de dois meses de vida todos os meses ele gerará um novo par, como proposto no problema. Assim, no final do quarto mês, haverá 3 pares de coelhos. O par inicial, o que foi gerado no mês anterior (este, inclusive já com dois meses de vida, tornando-se fértil, onde gerará um outro casal de coelhos todos os meses) e o que foi gerado no início deste mês, tendo assim, um mês de vida.

O número de par de coelhos no final do quinto mês pode ser entendido da seguinte forma: como no terceiro mês havia dois pares de coelhos, ambos com mais de um mês de vida, dois meses depois, ou seja, ao fim do quinto mês, esses dois pares se duplicarão, pois cada um dará a luz a um novo par e como no mês anterior havia três

pares, tem-se um total de 5 pares de coelhos. Dois do mês anterior que se duplicaram mais o que não é fértil ainda.

Assim, o número de pares de coelhos cresce rapidamente a cada mês. Logo, para um melhor entendimento e minimização dos cálculos, definimos a sequência  $(a_n)$  como o número de pares de coelhos ao final do  $n$ -ésimo mês. Tal maneira seria mais adequada aos alunos do 1º ano do Ensino Médio devido estar cientes ao conteúdo de sequências.

Daí, o número de coelhos ao final de um determinado mês “ $a_n$ ” será o dobro ao de dois meses anteriores “ $2(a_{n-2})$ ”, pois já teriam mais de dois meses de vida, logo procriariam, mais os que ainda não deram a luz a um novo par, o que no caso é igual a subtração do número de pares dos meses anteriores “ $(a_{n-1} - a_{n-2})$ ”.

Portanto, para determinar o número de pares de coelhos de um mês qualquer, pode ser dado da seguinte forma:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-2} + a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} - a_{n-2}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Em outras palavras o número de pares de coelhos ao final de um mês é igual à soma do número de pares dos dois meses anterior.

Vale salientar que essa fórmula só existirá a partir do terceiro mês. Isto ocorre, pois no caso de  $n = 2$  o termo  $a_{n-2}$  representará o número de coelhos ao final do mês zero, ou seja, o problema ainda não estaria em questão.

Na **Tabela 01**, verifica-se o resultante de pares de coelhos ao final de cada mês, calculado pelo termo geral da sequência  $(a_n)$ . Onde, de acordo com ela, percebe-se o número de pares de coelhos que podem ser gerado a partir do par inicial, pois basta subtrair o total de pares ao final do décimo segundo mês pelo par inicial, ou seja:

$$144 - 1 = 143$$

**TABELA 01:** Resolução do problema de reprodução dos coelhos

MESES	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; n > 2$
1º mês	1
2º mês	1
3º mês	$a_3 = 1 + 1 = 2$
4º mês	$a_4 = 2 + 1 = 3$
5º mês	$a_5 = 3 + 2 = 5$
6º mês	$a_6 = 5 + 3 = 8$
7º mês	$a_7 = 8 + 5 = 13$
8º mês	$a_8 = 13 + 8 = 21$
9º mês	$a_9 = 21 + 13 = 34$
10º mês	$a_{10} = 34 + 21 = 55$
11º mês	$a_{11} = 55 + 34 = 89$
12º mês	$a_{12} = 89 + 55 = 144$

Fonte: o autor

É interessante ressaltar que o total de pares de coelhos resultou na seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Sequência ao qual, como descrito anteriormente, hoje é chamada de sequência de Fibonacci.

A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,..., na qual cada termo (começando do terceiro) é igual à soma dos dois termos anteriores, foi apropriadamente chamada de sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas<sup>7</sup> (1842-1891). (LÍVIO, 2006, p.117).

<sup>7</sup> **Edouard Lucas:** nasceu em 04 de abril de 1842 em Amiens, França, e morreu em 03 de outubro de 1891. Lucas é conhecido pelos seus estudos na famosa fórmula matemática de Fibonacci, conhecida como Sequência de Fibonacci. Seus estudos nesta área são conhecidos como Sequência de Lucas. Foi ele quem elaborou a fórmula para encontrar o termo n elevado a th da Sequência de Fibonacci. Lucas foi também um dos maiores estudiosos dos números primos. Foi o matemático que, manualmente, encontrou o maior número primo conhecido. Dentre seus estudos, inventou vários brinquedos. Os mais populares foram o Quebra-cabeças de Baguenaudier, mais conhecido como Anéis Chineses, elaborado a partir de uma solução binária para o problema de mesmo nome, e a Torre de Hanói, que ele comercializou largamente na Europa.

Portanto, de acordo com Edouard Lucas a sequência de Fibonacci teve seus primeiros indícios em 1202 no livro *Liber Abacci*, escrito pelo próprio Fibonacci ao introduzir, indiscretamente, um problema relacionado à reprodução dos coelhos.

### 3 DIVERSIDADE DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

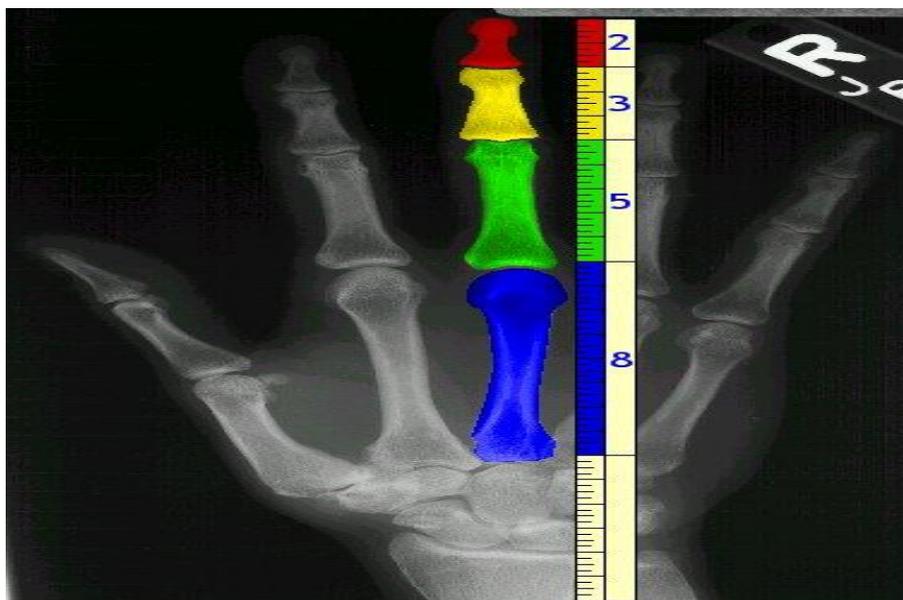
Com o passar dos anos, desde a descoberta da sequência de Fibonacci, percebe-se que ela está ligada a várias situações, por exemplo, na reprodução das abelhas, nas notas das músicas, na quantidade de pétalas das rosas, entre outros. Onde este envolvimento despertou o interesse de vários pesquisadores a se maravilharem com tal sequência.

Diante destas situações, apresentaremos também, algumas que contêm ligação com conteúdos do ensino médio, quais sejam, o seu envolvimento no triângulo de Pascal, um problema de física, assim como a sua ligação com o cotidiano.

#### 3.1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO CORPO HUMANO

Estudos mostram que os ossos das mãos têm comprimentos aproximados aos números de Fibonacci. A **Figura 03** mostra os ossos de uma mão de uma pessoa, na qual, observando o dedo médio de cima para baixo tem medidas 2, 3, 5 e 8 em centímetros.

**Figura 03:** Medição dos ossos do dedo médio de uma pessoa



**Fonte:** Disponível em: <<http://unialmisal.blogspot.com.br/2012/02/incrivel-sequencia-de-fibonacci.html>>.

Acesso em: 03/07/2017.

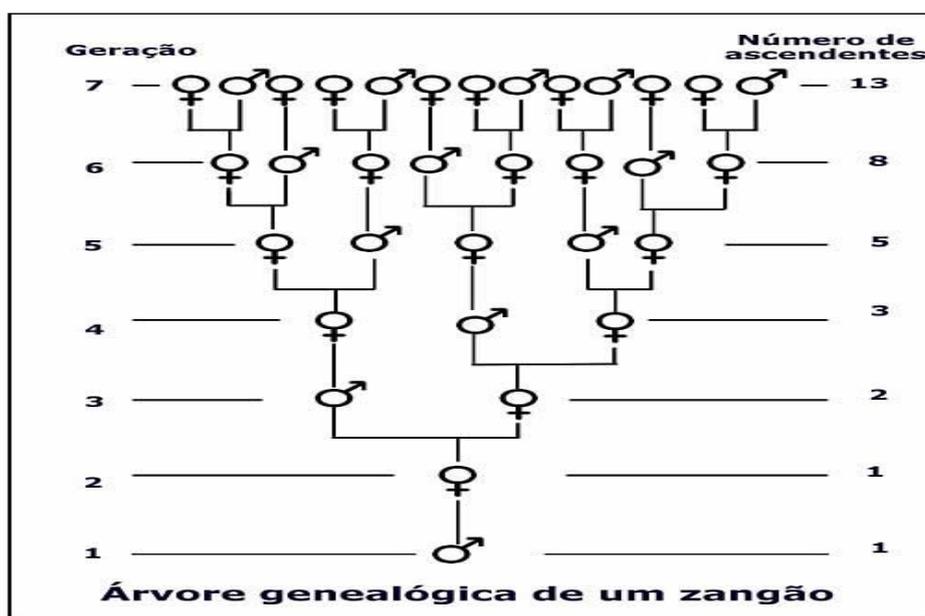
### 3.2 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E AS ABELHAS

Ao analisar a reprodução das abelhas observa-se o surgimento da sequência de Fibonacci no número de antecedentes de um zangão<sup>8</sup>. Os ovos que são fertilizados geram abelhas comuns e os ovos não fertilizados geram zangões. Assim, as abelhas comuns tem pai e mãe, já os zangões possuem apenas pai.

Considerando na primeira geração ter nascido um zangão  $\alpha$ , na segunda geração ele só tem 1 antecedente que é sua mãe. Como sua mãe teve pai e mãe, na terceira geração, o zangão  $\alpha$ , teve 2 antecedentes que são seus avós. O avô do zangão  $\alpha$  teve um pai, já a avó teve um pai e uma mãe, resultando em 3 antecedentes na quarta geração.

Assim, como é visto na **Figura 04** que retrata da árvore genealógica de um zangão, o número de antecedentes de um zangão qualquer de geração em geração é igual a, respectivamente, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc.

**Figura 04:** Árvore genealógica de um zangão



**Fonte:** Disponível em: <<http://www.bpiropo.com.br/graficos/FPC20070319a.jpg>>.

Acesso em: 03/07/2017.

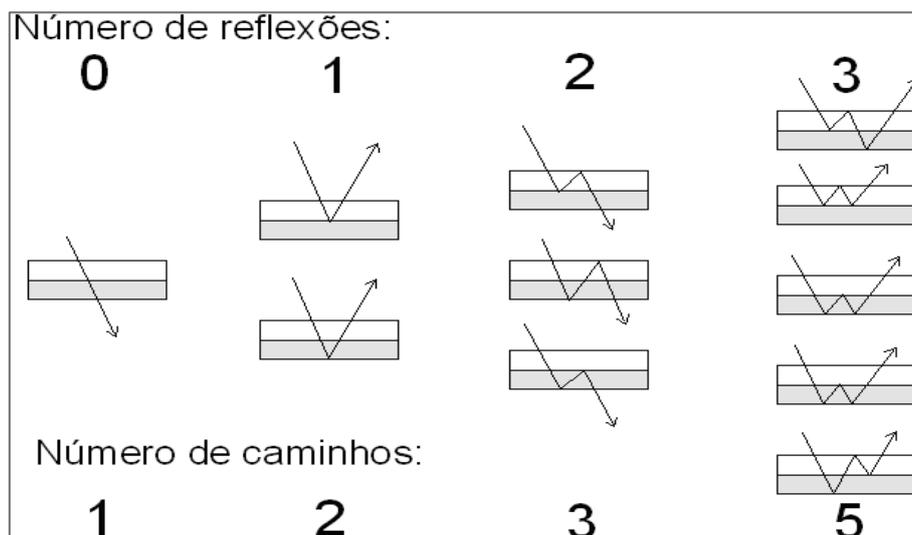
<sup>8</sup> **Zangão:** é o macho das diversas espécies de abelhas sociais, especialmente de abelha europeia. O seu papel principal na colmeia é de reprodutor.

### 3.3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA FÍSICA

Existe um estudo de uma aplicação na física cujo resultado decorre da sequência de Fibonacci. Maurício Zahn (2011) cita tal problema da seguinte forma: “Seja um conjunto formado por duas placas de vidro justapostas, com índices de refração diferentes. Um raio de luz que incidir sobre tal conjunto pode sofrer reflexões e desvios de várias formas”.

Nota-se na **Figura 05** que ao aumentar o número de reflexões em uma unidade, o número de possibilidades será, respectivamente, igual a 1, 2, 3, 5, 8, etc. Tais possibilidades estão na ordem dos termos da sequência de Fibonacci.

**Figura 05:** possibilidades de refração do raio de luz por duas placas de vidro

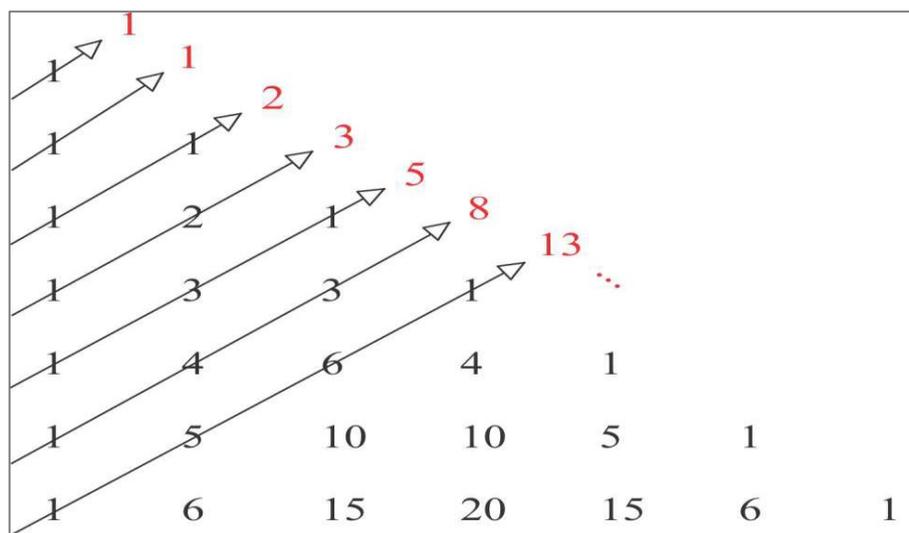


**Fonte:** Disponível em: <<http://www.seara.ufc.br/donafifi/fibonacci/reflexoes.gif>>.

Acesso em: 03/07/2017.

### 3.4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO TRIÂNGULO DE PASCAL

A sequência de Fibonacci também pode ser determinada no Triângulo de Pascal, pois como mostra a **Figura 06**, ao somarmos os elementos de sua diagonal inversa, observa-se que o número de termos resultantes é, respectivamente, igual 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

**Figura 06:** Somas dos elementos da diagonal inversa do triângulo de Pascal

Fonte: Diogo Dalyson

Na página 38, é apresentada tal propriedade, cujo retrata que a soma dos elementos da  $n$ -ésima “diagonal inversa” do Triângulo de Pascal é o número de Fibonacci  $f_n$ .

### 3.5 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA MÚSICA

Segundo Fabiana dos Santos (2013): “Em música os números de Fibonacci são utilizados para a afinação, tal como nas artes visuais, determinar proporções entre elementos formais”. Assim, a sequência de Fibonacci está presente em vários casos na música.

Já, conforme Adriano C. Monteiro (2014),

Na música, essa sequência está presente nos intervalos musicais, ou seja, na relação entre duas notas, formando as escalas que são a base para as melodias e para os acordes (harmonia). Esses intervalos procedem em graus a partir da primeira nota, ou tônica. Por exemplo, a escala básica e simples é formada por intervalos de terça (3º grau), quinta (5º grau) e oitava (8º grau) a partir da tônica (1º grau), ou seja, a sequência Fibonacci: 3, 5, 8. Essa sequência na escala natural, de tonalidade dó maior (ou C, em notação cifrada), apresentará, então, as notas mi (3º grau), sol (5º grau) e dó (8º grau) a partir da tônica dó (1º grau) – em cifras, E, G e C, respectivamente.

Portanto, um interessante envolvimento da sequência de Fibonacci e a música são apresentados nas tonalidades do dó maior. A **Figura 7** mostra esse nível de

tonalidade em graus, a partir da tônica inicial, que são iguais a 1, 3, 5 e 8, respectivamente.

**Figura 07:** Tonalidades do dó maior



**Fonte:** Disponível em: <<http://whiplash.net/materias/biografias/203304.html>>  
Acesso em: 03/07/2017.

### 3.6 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A NATUREZA

Uma das partes mais interessantes e instigantes da sequência de Fibonacci é sua ligação com a natureza. Por exemplo, o número de pétalas de algumas flores.

**Figura 08:** Erva da fortuna roxa



**Fonte:** Disponível em: <[http://3.bp.blogspot.com/-KTJRHKQ7\\_K8/UIULhWKGnZI/AAAAAAAAACTw/BvvhR-N3VIc/s1600/DSCF9989.JPG](http://3.bp.blogspot.com/-KTJRHKQ7_K8/UIULhWKGnZI/AAAAAAAAACTw/BvvhR-N3VIc/s1600/DSCF9989.JPG)>.  
Acesso em: 03/07/2017.

Na **Figura 08** é exposta a flor Erva da fortuna roxa, com 3 pétalas, assim, como os trevos normais (**Figura 09**) que contém 3 folhas cada.

**Figura 09:** Trevos normais

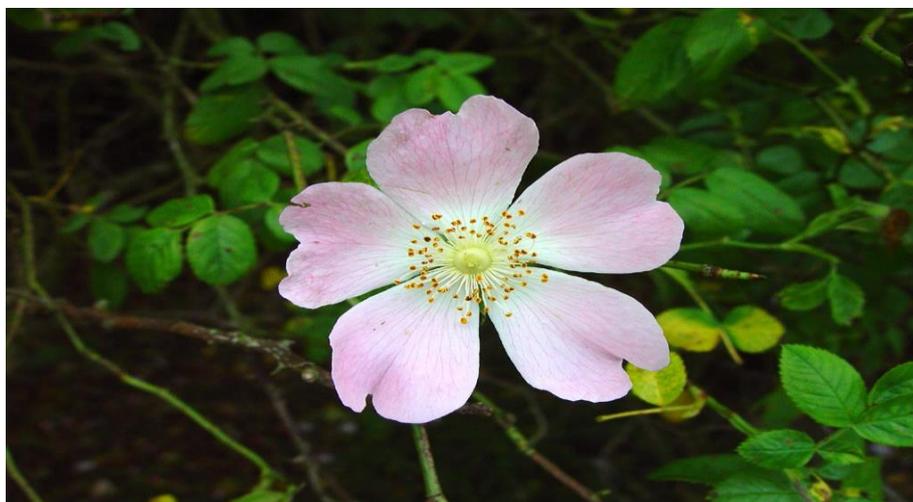


**Fonte:** Disponível em: <<https://saltoaltofutebolclub.files.wordpress.com/2012/04/trevo-da-sorte-13e14.jpg>>.

Acesso em: 03/07/2017.

Nas **Figuras 10 e 11** são apresentadas as flores Ameixoeira dos Jardins e Coreópsis (a coreópsis é mais conhecida como margarida amarela), respectivamente, com 5 e 8 pétalas cada.

**Figura 10:** Ameixoeira dos jardins



**Fonte:** Disponível em: < <https://www.kuleuven-kulak.be/kulakbiocampus/bomenheesters/Rosa%20canina%20-%20Hondsroos/06-hondsroos1-H2.jpg> >.

Acesso em: 03/07/2017.

**Figura 11:** Flor coreópsis

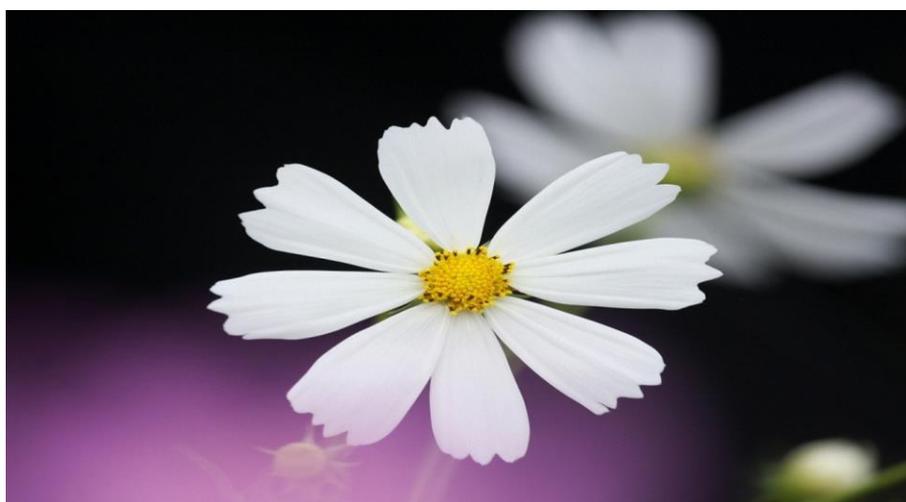


**Fonte:** Disponível em: <[https://loghouseplants.com/plants/wp-content/uploads/2012/02/Coreopsis\\_ZagrebZ.jpg](https://loghouseplants.com/plants/wp-content/uploads/2012/02/Coreopsis_ZagrebZ.jpg)>.

Acesso em: 03/07/2017.

Os números de pétalas das margaridas são ainda mais interligados aos números de Fibonacci<sup>9</sup>. Nas **figuras 12, 13 e 14** são apresentadas margaridas com 8, 13 e 21 pétalas, respectivamente. Existem margaridas com 34 pétalas, mas devido à dificuldade em contar suas pétalas, omitiu-se a imagem.

**Figura 12:** Margarida de 8 pétalas



**Fonte:** Disponível em: <<http://www.anawalls.com/images/flowers/daisy-flower-petals-background.jpg>>.

Acesso em: 03/07/2017.

---

<sup>9</sup> **Números de Fibonacci:** são os números que representam os termos da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...).

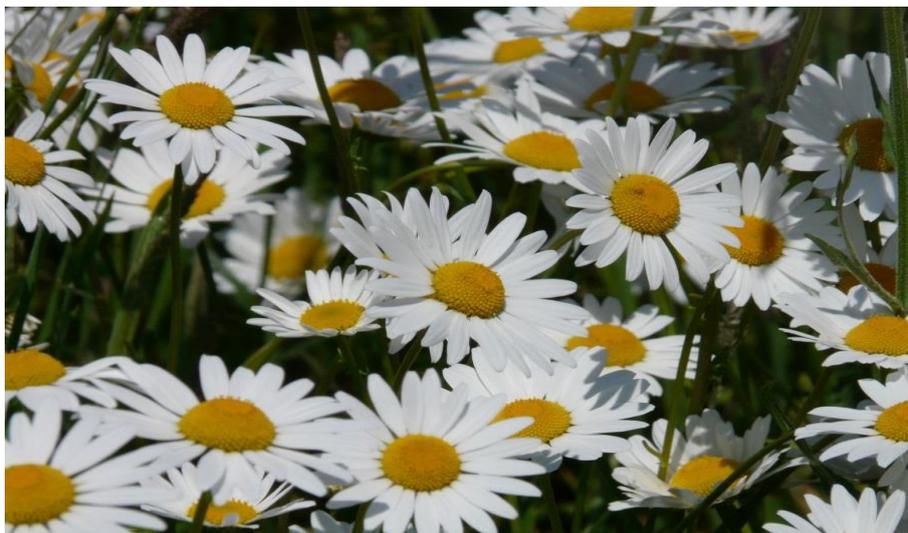
**Figura 13:** Margaridas de 13 pétalas



**Fonte:** Disponível em: < <http://flores.culturamix.com/blog/wp-content/gallery/curiosidades-sobre-a-margarida-4/Curiosidades-Sobre-a-Margarida-11.jpg>>.

Acesso em: 03/07/2017.

**Figura 14:** Margaridas com 21 pétalas



**Fonte:** Disponível em: <<http://blog.giulianaflores.com.br/wp-content/uploads/2013/11/cultivar-margaridas.jpg>>.

Acesso em: 03/07/2017.

Outro caso a se analisar é quanto ao caule de algumas árvores. Maurício Zahn (2011), diz que “As ramificações de algumas árvores (...) também apresentam a sequência de Fibonacci”.

A planta *Achillea ptarmica* tem a característica de nascer um broto de um galho a cada mês, onde cada broto leva dois meses para produzir um novo broto. Assim, como mostra a **Figura 15**, o número de galhos visto de baixo para cima numa linha horizontal é igual a 1, 2, 3, 5, 8, e assim sucessivamente.

**Figura 15:** *Achillea ptarmica*



**Fonte:** Disponível em:  
<<http://leventtourne.free.fr/livreouvert/NombreOr/IMAGES/achille.jpg>>.  
Acesso em: 07/2017.

Segundo Monique Teixeira (2013):

A gente tem que trazer na vivência do dia a dia do aluno, aquilo que está próximo dele, relacionar os conteúdos com a vida para que se torne mais fácil à aprendizagem e eles entendam, tenha uma melhor compreensão desses conteúdos.

Assim, torna-se mais relevante a apresentação da sequência de Fibonacci no ensino médio devido a sua ligação com os diversos casos apresentados anteriormente.

## 4 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO MÉDIO

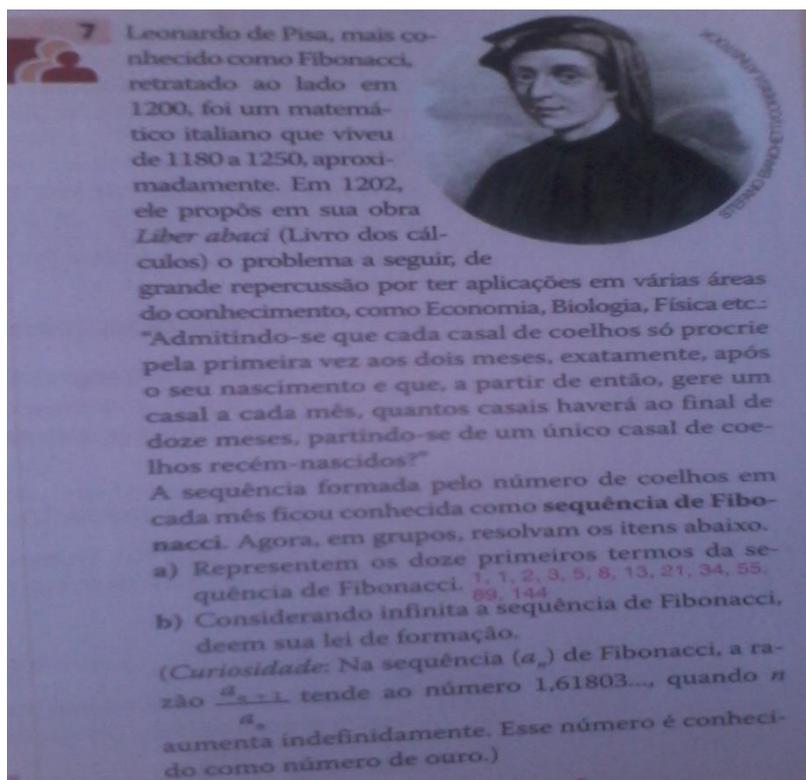
A abordagem desse tema em livros didáticos do ensino médio pode ser considerada pouca, devido à relevância do assunto.

No livro “Conexões com a Matemática”, Juliane Matsubara Barroso (2010), ressalta que:

Por apresentar propriedades instigantes e significativas, que se aproximam de fenômenos da natureza, a sequência de Fibonacci tornou-se uma das mais importantes da História da Matemática. O número de pequenas flores que formam o miolo do girassol e o número de escamas de certos peixes, por exemplo, podem ser associados à sequência de Fibonacci.

Apesar de apresentar a sequência de Fibonacci como a mais importante da história da Matemática, esta é a única parte em que é retratado tal assunto.

**Figura 16:** A sequência de Fibonacci no livro Matemática Paiva



Fonte: o autor

Na **Figura 16** é apresentada uma questão sobre a sequência de Fibonacci retirada do livro “Matemática Paiva” de Manoel Paiva (2013), onde este é o único momento em que se é abordado este tema.

Já no livro “Matemática: contexto e aplicações” de Luiz Roberto Dante (2013), apesar de abordar tal assunto apenas como um momento de Leitura é um dos que mais se retrata sobre a sequência de Fibonacci. Ele inicia falando de Leonardo de Pisa, ressaltando que:

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, contribuiu com diversas pesquisas para o desenvolvimento da Matemática. Em 1202, em seu livro intitulado *Líber Abaci*, apresentou o problema que o consagrou. Acompanhe:

Logo após, apresenta o problema dos coelhos seguido de sua resolução e finaliza informando “Você sabia? A sequência de Fibonacci também é usada na Bolsa de Valores para tentar prever os preços futuros. Essa mesma sequência aparece em uma parte do filme *O código da Vinci*, baseado no livro de Dan Brown.”.

Diante destes livros didáticos, percebe-se a pouca abordagem sobre a sequência de Fibonacci. Assim, nesta seção é feita uma análise de quais conteúdos matemáticos estão inseridos no estudo da sequência de Fibonacci.

Primeiramente são apresentadas algumas das propriedades matemáticas da sequência, juntamente com as demonstrações e exemplificações. E em seguida são apresentadas algumas questões sobre a sequência de Fibonacci retiradas de provas anteriores, como: seleções de vestibulares, ENEM, concursos, OBMEP, etc.

#### **4.1 ALGUMAS PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI**

Ao aprofundar o estudo sobre a sequência de Fibonacci, pode-se perceber que há várias propriedades matemáticas referentes a ela, onde algumas destas propriedades contém uma contextualização adequada para o primeiro ano do ensino médio.

No estudo de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas é retratado o conteúdo da soma dos  $n$  termos de uma sequência dada. Tais fórmulas são, respectivamente, representadas por:

$$S_n = \frac{(a_1 + an)n}{2} \text{ e } S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

A propriedade 1 pode ser assemelhada a estes conteúdos de PA e PG. Além disso, as propriedades 2 e 3, estendem este estudo, uma vez que, podem determinar a soma dos números de ordem ímpar, assim como a soma dos números de ordem par da Sequência de Fibonacci.

**Propriedade 1:** A soma  $S_n$ ,  $n > 1$ , dos  $n$  primeiros números da Sequência de Fibonacci é dada por  $S_n = F_{n+2} - 1$ .

Antes de apresentar a demonstração desta propriedade é importante ressaltar que devido os termos da sequência de Fibonacci serem determinados pela soma de seus dois antecessores imediatos a ele, onde os dois primeiros termos são iguais a 1, podemos definir a sequência recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(2) = 2 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2); n > 2 \end{cases}$$

onde  $F(n)$  representa o  $n$ -ésimo número na sequência de Fibonacci.

**Demonstração:** Pela definição recursiva da sequência de Fibonacci, tem-se:

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 \Rightarrow F_1 = F_3 - F_2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 \Rightarrow F_2 = F_4 - F_3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 \Rightarrow F_3 = F_5 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \Rightarrow F_{n-1} = F_{n+1} - F_n \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_n = F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

Assim a soma  $S_n$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_n &= F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n \\ S_n &= (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + (F_5 - F_4) + \dots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1}) \\ S_n &= F_{n+2} - F_2 \end{aligned}$$

E como  $F_2 = 1$ , tem-se:

$$S_n = F_{n+2} - 1$$

□

Essa propriedade nos esclarece que para sabermos a soma dos  $n$  primeiros termos da sequência basta saber o valor do termo  $a_{n+2}$ . Ou seja, se quiser saber a soma dos 3 primeiros termos da sequência basta conhecer  $a_5$ , dos 4 primeiros termos basta conhecer  $a_6$ , e assim, sucessivamente.

**Propriedade 2:** A soma dos números de ordem ímpar da Sequência de Fibonacci é igual a  $F_{2n}$ .

**Demonstração:** Seja  $S_{ni}$  a soma dos  $n$  primeiros termos ímpares da sequência de Fibonacci, logo:

$$S_{ni} = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}; n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0.$$

Como pela definição recursiva da sequência de Fibonacci, tem-se:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 \Rightarrow F_3 = F_4 - F_2 \\ F_6 &= F_5 + F_4 \Rightarrow F_5 = F_6 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{2n-2} &= F_{2n-3} + F_{2n-4} \Rightarrow F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4} \\ F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} \Rightarrow F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_{ni} &= F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1} \\ S_{ni} &= F_2 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \dots + (F_{2n-2} - F_{2n-4}) + (F_{2n} - F_{2n-2}) \\ S_{ni} &= F_{2n} \end{aligned}$$

□

Assim, pode-se determinar a soma de quantos termos ímpares quiser da sequência de Fibonacci, basta conhecer o termo  $F_{2n}$ . Por exemplo, se quisermos determinar a soma dos quatro primeiros termos ímpares da sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), basta conhecer o oitavo termo, pois  $F_{2n} = F_{2 \cdot 4} = F_8 = 21$ .

**Propriedade 3:** A soma dos números de ordem par da Sequência de Fibonacci é igual a  $F_{2n+1} - 1$ .

**Demonstração:** Seja  $S_{np}$  a soma dos  $n$  primeiros termos pares da sequência de Fibonacci, logo:

$$S_{np} = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n}; n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0.$$

De acordo com a propriedade 1, pode-se escrever a soma dos números de Fibonacci até a ordem “ $2n$ ” da seguinte forma:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 \quad (*)$$

Já, com base na propriedade 2, pode-se escrever a soma dos números de ordem ímpar da sequência de Fibonacci até a ordem “ $2n - 1$ ” da seguinte forma:

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} \quad (**)$$

Subtraindo, membro a membro, a equação (\*) da (\*\*), tem-se:

$$\begin{aligned} F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \dots + F_{2n} &= F_{2n+2} - F_{2n} - 1 \\ S_{np} &= F_{2n+2} - F_{2n} - 1 \end{aligned}$$

Como, pela definição recursiva da sequência, tem-se:

$$F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} \Rightarrow F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1}$$

Daí,

$$S_{np} = F_{2n+1} - 1$$

□

Por exemplo, se quisermos saber a soma “ $F_6 + F_8 + F_{10}$ ”, basta subtrair a soma dos cinco primeiros termos pares da soma dos dois primeiros pares da sequência de Fibonacci. Logo:

$$\begin{aligned} F_6 + F_8 + F_{10} &= S_{5p} - S_{2p} \\ F_6 + F_8 + F_{10} &= (F_{2.5+1} - 1) - (F_{2.2+1} - 1) \end{aligned}$$

$$F_6 + F_8 + F_{10} = F_{11} - F_5$$

$$F_6 + F_8 + F_{10} = 89 - 5 = 84$$

**Propriedade 4:** A Soma dos quadrados dos números da Sequência de Fibonacci é igual a  $F_n \cdot F_{n+1}$ .

**Demonstração:** De fato, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$(F_n)^2 = F_n \cdot F_n = F_n \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}$$

Assim, podemos escrever o quadrado de cada termo da sequência de Fibonacci das seguintes formas:

$$\begin{aligned} (F_1)^2 &= F_1 \cdot F_2 \\ (F_2)^2 &= F_2 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_1 \\ (F_3)^2 &= F_3 \cdot F_4 - F_3 \cdot F_2 \\ (F_4)^2 &= F_4 \cdot F_5 - F_4 \cdot F_3 \\ &\vdots \\ (F_{n-1})^2 &= F_{n-1} \cdot F_n - F_{n-1} \cdot F_{n-2} \\ (F_n)^2 &= F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F_k)^2 &= (F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + (F_4)^2 + \dots + (F_n)^2 \\ \sum_{k=1}^n (F_k)^2 &= F_1 \cdot F_2 + (F_2 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_1) + (F_3 \cdot F_4 - F_3 \cdot F_2) + (F_4 \cdot F_5 - F_4 \cdot F_3) + \dots + \\ &\quad (F_{n-1} \cdot F_n - F_{n-1} \cdot F_{n-2}) + (F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}) \\ \sum_{k=1}^n (F_k)^2 &= F_n \cdot F_{n+1} \end{aligned}$$

□

Esta propriedade minimiza bastante os cálculos da soma dos quadrados dos números de Fibonacci. Por exemplo, para determinar a soma dos quadrados dos oito primeiros termos da sequência, teríamos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (F_k)^2 &= (F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + (F_4)^2 + (F_5)^2 + (F_6)^2 + (F_7)^2 + (F_8)^2 \\ \sum_{k=1}^8 (F_k)^2 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 \\ \sum_{k=1}^8 (F_k)^2 &= 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 + 441 \\ \sum_{k=1}^8 (F_k)^2 &= 714 \end{aligned}$$

Logo, a medida que aumenta o valor de  $n$ , os cálculos ficarão cada vez mais extensos. Mas utilizando a propriedade 4, basta conhecer dois termos, no caso,  $F_8$  e  $F_9$  e efetuar a multiplicação. Assim:

$$\sum_{k=1}^n (F_k)^2 = F_8 \cdot F_9 = 21 \cdot 34 = 714$$

Ao utilizar as propriedades de 1 a 4, é necessário o conhecimento de pelo menos um termo da sequência de Fibonacci. Diante disso, apresentaremos a seguir a fórmula que determina um termo qualquer da sequência.

O que torna esse conhecimento ainda mais interessante é que no estudo de Progressões aritméticas e Progressões geométricas também é descrito o conteúdo que retrata o termo geral de uma sequência em questão.

Tal propriedade é conhecida como Fórmula de Binet<sup>10</sup>.

**Propriedade 5:** O termo geral da sequência de Fibonacci é  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]; \forall n \geq 1$ .

**Demonstração:** Por indução matemática, tem-se:

(i) É válida para  $n = 1$ , pois teremos:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right]$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}$$

$$F_1 = 1$$

(ii) Suponhamos a propriedade ser válida para  $n \in \{1, 2, 3, \dots, k-1, k\}$ . Devemos mostrar que também é válida para  $n = k+1$ .

Por hipótese, tem-se:

---

<sup>10</sup> **Jacques Philippe Marie Binet:** Foi um matemático francês (1786-1856), onde uma das suas contribuições matemáticas foi a descoberta da fórmula de Binet, em 1843. Ele também fez contribuições no campo da física e da astronomia.

$$F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right]$$

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$$

E como, pela definição de recorrência da sequência de Fibonacci,  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ , para todo  $k \geq 2$ . Logo,

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right]$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{-1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( 1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}} \right)$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right]$$

Portanto, a propriedade é válida para  $n \geq 1$ .

□

Achar um termo da sequência de Fibonacci pela fórmula de Binet para  $n$  igual a 1 ou a 2 é de simples resolução, mas a medida que aumenta o valor de  $n$ , o cálculo torna-se cada vez mais complexo. Para isso, precisa-se do artifício de uma calculadora.

Por exemplo, para achar  $F_8$  e  $F_9$ , tem-se que resolver potências com expoentes 8 e 9, respectivamente.

$$F_8 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^8 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^8 \right] \text{ e } F_9 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^9 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^9 \right]$$

Manualmente, demoraria bastante para resolver, já com o uso de uma calculadora, em poucos segundos obtém-se  $F_8 = 34$  e  $F_9 = 55$ .

Além das propriedades de 1 a 5, da sequência de Fibonacci, existem algumas um pouco mais complexas, além de, nas demonstrações, conterem partes de conhecimentos distintos para alunos do 1º ano do ensino médio.

Algumas destas podem ser vistas nas propriedades 6, 7 e 8 aqui apresentadas. Apesar disto, suas demonstrações serão expostas, afim de um melhor entendimento de ambas e engrandecimento da pesquisa.

**Propriedade 6:** Dois números consecutivos na sequência de Fibonacci não têm quaisquer fatores comuns, o que significa dizer que eles são relativamente primos<sup>11</sup>.

**Demonstração:** Por indução matemática, temos:

(i)  $F_1$  e  $F_2$  são primos entre si, pois,

$$F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1$$

Suponhamos que  $F_k$  e  $F_{k+1}$  sejam primos entre si, ou seja, tenham apenas o número 1 como fator comum nas suas decomposições em fatores primos. Precisamos verificar se  $F_{k+1}$  e  $F_{k+2}$  também são primos entre si.

Suponhamos, agora, que  $F_{k+1}$  e  $F_{k+2}$  não sejam primos entre si e que tenham, além do 1, outro fator em comum na sua decomposição em fatores primos. Seja  $p$  este número.

Como, pela definição recursiva da sequência de Fibonacci,

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad \Rightarrow \quad F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$$

Logo  $F_k$  também seria múltiplo de  $p$ . Assim,  $F_k$  e  $F_{k+1}$  teria o  $p$  além do 1 como divisor comum, o que é um absurdo, haja vista, serem relativamente primos.

Daí,  $F_{k+1}$  e  $F_{k+2}$  são primos entre si.

□

Dessa forma se pegarmos dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, por exemplo, o oitavo e o nono, teremos:

$$F_8 = 21 \text{ tem como divisores } 1, 3, 7 \text{ e } 21.$$

---

<sup>11</sup> **Relativamente primos:** é um conjunto de dois ou mais números naturais cujo único divisor comum a todos eles seja o número 1. Também é chamado de coprimos ou primos entre si.

$F_9 = 34$  tem como divisores 1, 2, 17 e 34.

Como  $F_8$  e  $F_9$  tem apenas o 1 como divisor comum, logo eles são relativamente primos.

**Propriedade 7:** A soma dos elementos da  $n$ -ésima “diagonal inversa” do Triângulo de Pascal é o número de Fibonacci  $f_n$ .

**Demonstração:** Seja  $F_k$  a soma dos elementos da  $n$ -ésima “diagonal inversa” do Triângulo de Pascal. Devemos mostrar que,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , para todo  $n > 2$ .

**Tabela 2:** Triângulo de Pascal na forma binária

$\binom{0}{0}$							
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	
$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	...	$\binom{n}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: o autor

Seja  $F_0$  a primeira diagonal, logo, observando a **Tabela 2**, tem-se:

$$F_0 = \binom{0}{0}$$

$$F_1 = \binom{1}{0}$$

$$F_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} \\
F_4 &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} \\
&\vdots \\
F_n &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \\
F_{n+1} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots \\
F_{n+2} &= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Logo, adicionando  $F_{n+1}$  com  $F_n$ , teremos:

$$\left[ \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots \right] + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \right]$$

ou ainda,

$$\binom{n+1}{0} + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] + \left[ \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] + \left[ \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3} \right] + \dots$$

Fazendo,  $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+2}{0}$  e utilizando a fórmula de Stifel para binômios de Newton “ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ”, temos:

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots = F_{n+2}.$$

□

A propriedade 7 pode ser entendida e exemplificada observando a **Figura 03**, na página 21, pois a soma das diagonais em questão resultam em 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc. Ou seja, são os números que representam a sequência de Fibonacci.

**Propriedade 8:** Sejam  $(u_n)$  e  $(v_n)$  duas sequências de Fibonacci e  $y$  um escalar real.

- (i) Se  $z_n = u_n + v_n$ , então, para todo  $n \geq 3$ , tem-se:  $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$ .
- (ii) A sequência  $(y \cdot v_n) = y \cdot (v_n)$  satisfaz  $y \cdot v_n = y \cdot v_{n-1} + y \cdot v_{n-2}$ .

**Demonstração:** Sejam  $(u_n)$  e  $(v_n)$  duas sequências, definidas recursivamente, como a sequência de Fibonacci. Ou seja,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ e } v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$$

(i) Seja  $(z_n)$  uma sequência da forma:

$$z_n = u_n + v_n$$

Logo,

$$z_n = (u_{n-1} + v_{n-1}) + (u_{n-2} + v_{n-2})$$

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$$

(ii) Multiplicando ambos os membros da equação “ $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ ”, pelo escalar  $y$ , têm-se:

$$y \cdot v_n = y \cdot v_{n-1} + y \cdot v_{n-2}$$

□

A propriedade 8, ressalta que, a sequência resultante da soma de duas sequências de ordem  $n$ , retiradas da sequência de Fibonacci preserva a característica principal da sequência de Fibonacci, qual seja: cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois anteriores, assim como, se multiplicarmos uma sequência de Fibonacci por um número real. Logo, pode-se dizer que também são uma sequência de Fibonacci.

Por exemplo, dadas às sequências  $(u_n) = (2, 3, 5, 8, 13)$  e  $(v_n) = (5, 8, 13, 21, 34)$ , e seja  $z_n = u_n + v_n$ , tem-se que:

$$(z_n) = (u_n) + (v_n)$$

$$(z_n) = (2, 3, 5, 8, 13) + (5, 8, 13, 21, 34)$$

$$(z_n) = (7, 11, 18, 29, 47)$$

Como,  $18 = 11 + 7$ ,  $29 = 18 + 11$  e  $47 = 29 + 18$ , pode-se perceber que a sequência  $(z_n)$  tem-se  $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$ ,  $\forall n \geq 3$ .

E se multiplicarmos  $(u_n)$  por 4, teremos:

$$4 \cdot (u_n) = 4 \cdot (2, 3, 5, 8, 13)$$

$$4 \cdot (u_n) = (8, 12, 20, 32, 52)$$

Logo  $4.(u_n) = 4.(u_{n-1}) + 4.(u_{n-2}), \forall n \geq 3$ , pois  $20 = 12 + 8$ ,  $32 = 20 + 12$  e  $52 = 32 + 20$ .

Portanto, com base nas propriedades analisadas acima, os alunos ao estudarem as propriedades inerentes à sequência de Fibonacci, além de aprenderem as propriedades, poderão lembrar e aprimorar seu conhecimento em alguns conteúdos à medida que resolva alguns exercícios.

Tais conteúdos são: **quadrados perfeitos** (nas questões referentes a propriedade 4); **números primos e primos entre si** (nas questões referentes a propriedade 5); **binômios de Newton** ou **combinação** (nas questões referentes a propriedade 6), donde este caberia para alunos do 2º ano do ensino médio após verem o conteúdo de “Binômio de Newton”; **recorrência** (na demonstração da propriedade 7); e **operações com potências** (na demonstração da fórmula de Binet).

## 4.2 QUESTÕES REFERENTES À SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Apesar de, na maioria dos livros não aprofundarem o conteúdo da sequência de Fibonacci, ou em alguns casos não sequer retratar sobre tal assunto, há uma quantidade significativa de questões referentes à sequência de Fibonacci em seleções de vestibulares, ENEM, concursos, OBM, etc. O que instiga a alguns, devido nunca ter visto tal assunto.

Algumas destas questões serão apresentadas seguir, onde no ANEXO A pode-se ver possíveis soluções delas.

**1. (FDC – 2015)** A sequência de números 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... é conhecida como sequência de Fibonacci. O 14º termo desta sequência é:

- A) 233
- B) 273
- C) 327
- D) 373
- E) 377

Para resolver esta questão, basta perceber que os números estão na ordem dos números de Fibonacci, logo, quem já domina tal assunto, rapidamente usaria a definição de recorrência da sequência de Fibonacci para determinar os termos posteriores. Já quem nunca viu tal assunto, primeiramente tentaria ver uma ligação entre os números (o

que poderia levar muito tempo) para achar uma fórmula ou algo assim, para depois calcular termo a termo até o 14º.

O professor Paulo Henrique<sup>12</sup> ao se retratar sobre a **questão 1** acima diz, “Esta questão envolve a sequência de Fibonacci. Questões com esse raciocínio são tradicionais em prova. O examinador quer vencer o candidato pelo cansaço, mas é bem simples”.

Assim, Paulo Henrique, nos induz que, apesar das questões que envolvem a sequência de Fibonacci, na maioria dos casos, poderem ser consideradas simples, um candidato pode demorar muito tentando resolver a questão se nunca tiver visto tal assunto, podendo assim, perder tempo de prova ou até mesmo a questão pelo cansaço.

**2. (OBM - 2003)** Na sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{32} + \frac{8}{64} + \frac{13}{128} + \frac{21}{256} + \frac{34}{512} + \frac{55}{1024} + \dots,$$

onde o  $n$ -ésimo termo é o  $n$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci dividido por  $2^n$ ?

- A)  $3/2$
- B) 2
- C)  $5/2$
- D) 3
- E)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**3. (ITA - 2015)** Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  a sequência definida da seguinte forma:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  e  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ . Considere as afirmações a seguir:

- I. Existem três termos consecutivos,  $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}$ , que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.
- II.  $A_7$  é um número primo.
- III. Se  $n$  é múltiplo de 3, então  $a_n$  é par.

É (são) verdadeira(s):

- A) apenas II.
- B) apenas I e II.
- C) apenas I e III.

---

<sup>12</sup> **Paulo Henrique:** Professor formado em economia, onde costumeiramente resolve questões comentadas de concursos e ENEM anteriores.

D) apenas II e III.

E) I, II e III.

**4. (IME - 2008)** Uma série de Fibonacci é uma sequência de valores definida da seguinte maneira:

- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja,  $T_1 = T_2 = 1$ .

- Cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, isto é:  $T_n = T_{n-2} + T_{n-1}$ .

Se  $T_{18} = 2584$  e  $T_{21} = 10946$  então  $T_{22}$  é igual a:

A) 12225

B) 13530

C) 17711

D) 20412

E) 22121

**5. (ESAF – 2010)** A partir da lei de formação da sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., calcule o valor mais próximo do quociente entre o 11º e o 10º termo.

A) 1,732

B) 1,667

C) 1,618

D) 1,414

E) 1,5

**6. (UNICAMP - 2012)** O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de  $\frac{x+1}{x} = x$ .

a) Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.

b) A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... é conhecida como sequência de Fibonacci, cujo n-ésimo termo é definido recursivamente pela fórmula:

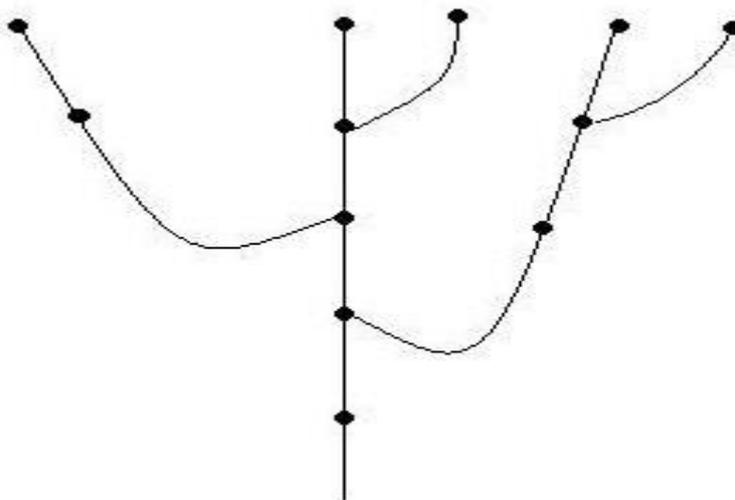
$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \text{ ou } 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Podemos aproximar o número áureo, dividindo um termo da sequência de Fibonacci pelo termo anterior. Calcule o 10º e o 11º termos dessa sequência e use-os para obter uma aproximação com uma casa decimal para o número áureo.

7. **(Banco de questões - OBMEP 2010)** A árvore de Emília – A árvore de Emília cresce de acordo com a seguinte regra: após duas semanas do aparecimento de um galho, esse galho produz um novo galho a cada semana e o galho original continua crescendo. Depois de cinco semanas, a árvore tem cinco galhos, como mostra a figura. Quantos galhos, incluindo o galho principal, a árvore terá no final de oito semanas?

A questão 07 foi retirada do livro preparatório para a OBMEP 2010. Uma curiosidade nela é que se olhar para a figura desta questão (**Figura 16**), percebe-se que é congruente a **Figura 15** da *Achillea ptarmica* vista na página 30. Assim, desprezando-se a possibilidade dos galhos caírem, o número de galhos após cada semana são os números de Fibonacci, ou seja, respectivamente, teremos: “1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...”. Portanto, a resposta seria 21 galhos.

**Figura 17:** A árvore de Emília



**Fonte:** Disponível em: < <http://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=1443>.>.

Acesso em: 05/07/2017

Portanto, ao analisar vários tipos de provas anteriores distintas, como seleções de vestibulares e OBM, percebe-se que na maioria delas uma das questões recai sobre o conteúdo da Sequência de Fibonacci, onde quem já tem uma base da sequência de Fibonacci e de sua definição recursiva leva vantagem quanto aos demais. Portanto, assim como PA e PG, é de grande relevância ver tal assunto no ensino médio.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer do capítulo 2 e 3 foi verificada a ligação da sequência de Fibonacci com diversos casos ao cotidiano, como: a reprodução das abelhas, os ossos da mão humana, um envolvimento na música, o número de pétalas de rosas e o crescimento de galhos de algumas árvores. Assim como, o “problema dos coelhos” o qual deu origem a descoberta da sequência de Fibonacci, dando assim, uma maior importância em abordar tal conteúdo no ensino médio.

Devido a pouca abordagem da sequência de Fibonacci em livros didáticos, foram analisadas algumas propriedades da sequência de Fibonacci, onde foram verificados vários conteúdos matemáticos envolvidos, de modo que, à medida que os alunos estudam tais propriedades, além de aprendê-las (principalmente, quanto a definição recursiva da sequência de Fibonacci,), poderão lembrar e aprimorar seu conhecimento em alguns conteúdos de anos anteriores, tais como: quadrados perfeitos, números primos e primos entre si, binômios de Newton ou combinação, recorrência e operações com potências.

Devido à existência de questões em OBM, OBMEP, concursos e seleções de vestibulares anteriores por todo o país, referentes à sequência de Fibonacci, pode-se perceber o seu envolvimento com os conteúdos do ensino médio, onde o envolvimento prévio de tal assunto facilitará a resolução de tais questões.

Portanto, diante das várias conclusões, fica evidente a importância de tal conteúdo aos alunos do 1º ano do ensino médio, ficando adequado se for apresentado após o conteúdo de sequências e antes de PA e PG.

Assim, a presente pesquisa foi de cunho relevante, pois além de deixar um possível Plano de Aula a ser repassados pelos docentes do 1º ano do ensino Médio (APÊNDICE B), proporcionou um estudo mais aprofundado sobre a temática, acumulando bagagem para a vida acadêmica e profissional do pesquisador e do orientador.

Ademais, cumpre-nos a deixar esta pesquisa para possíveis aprofundamento e desenvolvimento em trabalhos futuros.

**REFERÊNCIAS**

ÁVILA, Geraldo. Retângulo Áureo, Divisão Áurea e Sequência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 06, pág. 09-14, 1985.

AZAMBUJA, Monique Teixeira de. O Uso do Cotidiano Para o Ensino de Matemática em uma Escola de Caçapava do Sul. Caçapava do Sul, 2013.

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2010.

Bez, Edson. Relacionando Padrões entre a Sequência de Fibonacci, Seção Áurea e Ternos Pitagóricos. Florianópolis, 1997.

CARVALHO, J. B. P. F.. O problema de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, SP, v. 17, p. 4-9, 1990.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: conexões & aplicações. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013.

JESUS, Márcio Santana dos Santos de. Os Números de Fibonacci. Campinas, 2013.

MEDEIROS, Diogo Dalyson Costa de. Algumas Propriedades Matemáticas da Sequência de Fibonacci. Mossoró - RN, 2016.

MONTEIRO, Adriano Camargo. Música Fibonacci e o Diabo. Revista Sitra Ahra, v. 1, p. 12-17, 2014.

OLIVEIRA, Fernanda Alves de. CALDAS, Mayara Duarte de Araújo. Campinas, 2013.

PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva. – 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2013.

PEREIRA, Livia Da Cás. FERREIRA, Marcio Violante. Sequência de Fibonacci: História, Propriedades e Relações com a Razão Áurea. S. Maria, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.

ZAHN, Mauricio. Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. ed. Ciência Moderna, RJ, 2011.

### APÊNDICE A - Possíveis soluções das questões 1 á 6

1) **Solução:**

Para resolver a sequência bastam somar os dois termos anteriores e o resultado será o termo seguinte, observe:

$$\text{O } 1^{\circ} \text{ é } 0$$

$$\text{O } 2^{\circ} \text{ é } 1$$

$$\text{Então o } 3^{\circ} \text{ será } 0 + 1 = 1$$

$$\text{O } 4^{\circ} \text{ será } 1 + 1 = 2$$

Sucessivamente, teremos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Como,  $144 + 89 = 233$ , o 233 é o 14<sup>o</sup> termo.

**Gabarito: A**

2) **Solução:**

Temos,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{32} + \frac{8}{64} + \frac{13}{128} + \dots,$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{5}{64} + \frac{8}{128} + \dots$$

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{32} + \frac{3}{64} + \frac{5}{128} + \dots$$

Logo,

$$S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow S = 2$$

**Gabarito: B**

3) **Solução:**

I. Falsa.

Se  $(a_p, a_{p+1}, a_{p+2})$  formam, nesta ordem uma PG, então:

$$(a_{p+1})^2 = (a_p) \cdot (a_{p+2}) \quad (\text{I})$$

Mas, como:

$$a_{p+1} = a_{p+2} - a_p \quad (\text{II})$$

Fazendo  $(II)^2 = (I)$ , tem-se:

$$(a_{p+2})^2 - 3 \cdot (a_{p+2}) \cdot (a_p) + (a_p)^2 = 0$$

Dividindo a equação acima por  $(a_{p+2})^2$ , resultará em:

$$1 - \frac{3 \cdot a_p}{a_{p+2}} + \frac{(a_p)^2}{(a_{p+2})^2} = 0$$

Seja  $t = \frac{a_p}{a_{p+2}}$ , temos:

$$t^2 - 3t + 1 = 0 \implies t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

O que é um absurdo, pois  $t = \frac{a_p}{a_{p+2}}$  é um número racional.

II. Verdadeira.

A sequência apresentada é a de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...).

Logo,  $a_7 = 13$  e 13 é um número primo.

III. Verdadeira.

É fácil ver que, ao aparecer uma sequência do tipo (ímpar, ímpar, par), esta irá se repetir, uma vez que os próximos termos seriam:

ímpar + par  $\rightarrow$  ímpar

par + ímpar  $\rightarrow$  ímpar

ímpar + ímpar  $\rightarrow$  par

Como  $a_1 = 1$  é ímpar,  $a_2 = 1$  é ímpar e  $a_3 = 2$  é par a sequência irá se repetir, logo, se  $n$  for múltiplo de 3,  $a_n$  será par.

**Gabarito: D**

4) **Solução:**

Como,

$$T_{22} = T_{21} + T_{20}$$

$$T_{20} = T_{19} + T_{18}$$

$$T_{21} = T_{19} + T_{20}$$

Logo,

$$T_{21} - T_{20} = T_{20} - T_{18}$$

$$T_{21} + T_{18} = 2 \cdot T_{20}$$

Portanto,

$$T_{22} = T_{21} + (T_{21} + T_{18})/2$$

$$T_{22} = 10946 + (10946 + 2584)/2$$

$$T_{22} = 17711$$

**Gabarito: C**

5) **Solução:**

Sua lei de formação é:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Como a questão pede o quociente  $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ , vamos calcular  $a_{11}$  e  $a_{10}$ .

$$a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34$$

$$a_{10} = a_9 + a_8 = 34 + 21 = 55$$

$$a_{11} = a_{10} + a_9 = 55 + 34 = 89$$

Logo,  $\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} = 1,618$ .

**Gabarito: C**

6) **Solução:**

a) Resolvendo a equação  $\frac{x+1}{x} = x$ , temos:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ não convém}$$

$$S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

b) Da sequência dada, segue:

$$F(7) = 13$$

$$F(8) = 21$$

$$F(9) = F(8) + F(7) = 21 + 13 = 34$$

$$F(10) = F(9) + F(8) = 34 + 21 = 55$$

$$F(11) = F(10) + F(9) = 55 + 34 = 89$$

Então, a aproximação pedida é dada por:

$$\frac{F(11)}{F(10)} = \frac{89}{55} = 1,6$$

## APÊNDICE B - Plano de aula referente à sequência de Fibonacci

<b>PLANO DE AULA</b>	
ESCOLA: _____	
PROFESSOR (A): _____	
DISCIPLINA: Matemática	
DATA: 07/06/2017	CARGA HORÁRIA: 06 aulas de 50 minutos cada

TEMA CENTRAL: A sequência de Fibonacci
--

CONTEÚDOS
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ A sequência de Fibonacci e seus primeiros indícios</li> <li>✓ Diversidade da Sequência de Fibonacci</li> <li>✓ Algumas propriedades inerentes a Sequência de Fibonacci</li> </ul>

OBJETIVO GERAL
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Ter conhecimento da sequência de Fibonacci para poder resolver questões referentes a ela.</li> </ul>

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Identificar uma sequência de Fibonacci.</li> <li>✓ Identificar a sequência de Fibonacci nos diversos lugares que possam existir.</li> <li>✓ Aprender as propriedades inerentes a Sequência de Fibonacci.</li> </ul>

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Primeira Etapa – <b>Motivação</b>            Após o conteúdo de Sequências o professor deve apresentar o problema dos coelhos e dá-se um tempo para os alunos tentarem resolverem. Em seguida, o professor resolve o problema dos coelhos mostrando que os números encontrados no desenvolver</li> </ul>

da questão formam a conhecida sequência de Fibonacci.

✓ Segunda Etapa – **Orientação da Atividade**

Primeiramente apresenta a diversidade da sequência de Fibonacci, mostrando que ela está ligada com o dia a dia dos alunos. Tal assunto pode-se ver nos seguintes tópicos: A Sequência de Fibonacci e as Abelhas; Sequência de Fibonacci no corpo humano; Sequência de Fibonacci na física; Sequência de Fibonacci no triângulo de Pascal; Sequência de Fibonacci na música; Sequência de Fibonacci e a natureza.

Logo após, apresentam-se as propriedades inerentes a Sequência de Fibonacci, juntamente com suas demonstrações.

✓ Terceira Etapa – **Atividade**

O professor resolve questões em sala de aula referentes à sequência de Fibonacci e suas propriedades para exemplificar melhor tais propriedades e dar um melhor entendimento do conteúdo.

Por fim entrega uma atividade para os alunos com questões de seleções de vestibulares, concursos, OBMEP e OBM anteriores para os alunos resolverem extra sala de aula.

#### RECURSOS MATERIAIS

- ✓ Pincel, lápis, quadro, caderno do professor e do aluno.

#### AVALIAÇÃO

- ✓ Observar o envolvimento dos alunos quanto aos conteúdos abordados.  
 ✓ Analisar a construção e o desenvolvimento das resoluções das questões passadas para os alunos.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ✓ *Esta pesquisa (após catalogação)*